

(1) (c)(i) zkusíme ověřit axiomy metricky

$$\phi((a, x), (b, y)) = g(a, b) + d(x, y) \geq 0 \quad \text{tedy } \phi: (M \times X) \times (M \times X) \rightarrow [0, \infty)$$

rovněž $\phi((a, x), (b, y)) = 0$ právě pokud $g(a, b) = d(x, y) = 0$ (*),

protože $g(a, b), d(x, y)$ jsou vždy nezáporné. Protože g a d jsou metricky, platí

$$(*) \Leftrightarrow [(a=b) \wedge (x=y)] \Leftrightarrow [(a, x) = (b, y)],$$

tedy první axiom metricky platí.

$$\text{Dále } \phi((a, x), (b, y)) = g(a, b) + d(x, y) = g(b, a) + d(y, x) = \phi((b, y), (a, x))$$

$$\text{a } \phi((a, x), (b, y)) = g(a, b) + d(x, y) \leq g(a, c) + g(c, b) + d(x, z) + d(z, y)$$

$$= \phi((a, x), (c, z)) + \phi((c, z), (b, y)), \quad (a, x), (b, y), (c, z) \in M \times X.$$

Tvrzení tedy platí.

(c)(ii) tvrzení neplatí už první axiom metricky, protože

$$\phi((a, x), (a, y)) = g(a, a) \cdot d(x, y) = 0 \quad \text{pro libovolné } x, y \in X.$$

$$(2) (c)(i) \text{ platí, stačí zvolit } a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(ii) neplatí, protože $\sum a_n$ konverguje, platí $a_n \rightarrow 0$,

tedy $a_n^2 \leq a_n$ pro dostatečně velké n a řada

$\sum a_n^2$ konverguje podle srovnávacího kritéria

(iii), (iv) platí, stačí zvolit $a_n = \frac{1}{n}$

(3) (d) platí
$$S(x) = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)},$$
$$g(x) = B(x)e^{-A(x)} + De^{-A(x)},$$

kde A, B jsou nějaké funkce a $C, D \in \mathbb{R}$.

Potom
$$S(1) = B(1)e^{-A(1)} + Ce^{-A(1)}, \quad g(1) = B(1)e^{-A(1)} + De^{-A(1)}$$

Protože $S(1) = g(1)$, dostáváme $Ce^{-A(1)} = De^{-A(1)}$

a protože $e^x \neq 0 \quad x \in \mathbb{R}$, platí $C = D$ a tedy $S = g$.